

文章编号:1000-2472(2001)03-0019-06

松质骨应力松弛响应*

李德源¹, 陈海斌², 王正国²

(1. 汕头大学机电系, 广东 汕头 515063;

2. 第三军医大学附属大坪医院野战外科研究所, 重庆 400042)

摘 要:基于对松质骨结构特征的观察,引入描述松质骨的两相多孔弹性模型,对松质骨在给定恒位移下的应力松弛响应进行了深入的分析,采用 Laplace 变换,得出了一维应力松弛解析结果. 研究表明,由于松质骨中流体组分的扩散和流动,松质骨呈现着一种强烈的表观粘弹性行为以及能量耗散性质.

关键词:松质骨;应力松弛;多孔介质

中图分类号:O347.4

文献标识码:A

Stress Relaxation Response of Cancellous Bone in Compression

LI De-yuan¹, CHEN Hai-bin², WANG Zheng-guo²

(1. Dept of Mechanical Engineering, Shantou Univ, Shantou 515063, China; 2. Research Institute of Surgery, Daping Hospital, Third Military Medical Univ, Chongqing 400042, China)

Abstract: A one-dimensional stress relaxation response of cancellous bone to instant displacement loading is investigated. It is demonstrated, based on the studies with scanning microscope, cancellous bone could be viewed as a cellular solid consisting of an interconnected skeleton filled with medulla. A two-phase poroelastic model is introduced to describe the cancellous bone, in which the tissue(material) densities of the skeleton and medulla are assumed to be unchangeable while the corresponding apparent densities are changeable due to the change of volume fraction. The governing equations are derived for the case of a linear poroelastic solid skeleton saturated with an inviscid medulla. Under the displacement loading, responses of the skeleton displacement and stress as well as the medullary pressure are obtained with the use of Laplace transform technique. The computational result shows that the cancellous bone is provided with certain features

* 收稿日期:2001-01-01
基金项目:重庆市科委院士基金项目(渝科委 1998-93)
作者简介:李德源(1965-),男,四川隆昌人,汕头大学讲师.

similar to those appearing in viscoelastic solids, which means the responses do not only depend on time, but furthermore depend on previous loading history. It is worth paying attention to the result that the medullary pressure can be negative. This point is due to the recovery of the skeleton after unloading whereas the medulla is not squeezed out but absorbed into the pores by suction.

Key words: cancellous bone; stress relaxation; porous medium

由于要取得准确形状和尺寸的松质骨试样,以及采用恰当的力学模型来描述其力学行为都比较困难,松质骨力学性质及力学响应的研究相对于密质骨的研究要少得多。由于与年龄相关的骨折、假肢松弛、以及骨重建等科学和临床问题的推动,松质骨的力学特性的实验研究和理论分析近年来成为骨力学的研究焦点之一^[1]。

松质骨(或称小梁骨或海绵骨)是一种轻质多孔的骨骼组分,类似于一种蜂窝状或海绵状的多孔固体材料。骨基质构成片状、杆状的骨小梁,骨小梁的结构特征与工程上的多孔泡沫材料骨架极为相似。在骨小梁构成的孔间,充填着可流动的骨髓。外部作用施加在松质骨上,将引起骨小梁骨架变形,造成孔间流体压力变化,驱使骨髓在孔间流动;同时,这种流动又会反作用于骨架的变形,二者是相互耦合的。必须计及固体骨质和液态骨髓之间的相互作用,才能较好的研究松质骨的力学行为。1980年,Mow等^[2]基于混合物理论建立了描述关节软骨的两相多孔介质模型。该模型将软骨组织视为一两相不相混溶且不可压缩的混合物:一代表骨胶原和蛋白聚糖的固体相和一代表其间流动的水和电解溶液的流体相。他们用这种模型很好地解释了关节软骨在压缩时表现出来的粘弹性行为。此后,该模型被广泛地运用于生物力学领域。

本文的目的在于从固-流两相多孔介质理论出发,建立松质骨的数学模型,在此基础上,研究松质骨在一维压缩时的应力松弛响应,得出的解析结果可为松质骨围限压缩实验研究和有限元等数值方法提供参考。为简明起见,所考察的问题限定在一维的、固体骨质为线弹性小变形的情况,并且将松质骨简化为一种均匀的各向同性的饱和多孔材料。

1 松质骨的两相多孔弹性模型

松质骨由多孔固体骨架和充填其间的可流动的骨髓构成,现代多孔介质的理论框架主要基于连续介质力学的方法^[3,4],这为多孔介质的理论研究提供了坚实的基础。然而,作为附加的场变量,体积分数概念必须引入到模型中,并且进一步建立体积分数的演化关系以使模型封闭^[5]。多孔介质的平衡方程已经获得了广泛的一致,在下面的方程中,与每种组分相关的有:表观密度 ρ^a ($a=s$ 表示固体骨质, $a=f$ 液态骨髓),体积分数 ϕ^a (满足饱和约束条件: $\phi^f + \phi^s = 1$),质点速度 a'_s ,质点加速度 x''_s ,柯西应力 T^a 。排除组分间的质量交换,则质量、动量平衡方程的欧拉形式分别为:

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \text{div}(\rho^a x'_a) = 0 \quad (1)$$

$$\text{div} T^a + \rho^a (b^a - x''_a) + \dot{\phi}^a = 0, \quad \dot{\phi}^f + \dot{\phi}^s = 0 \quad (2)$$

对松质骨而言, 可以合理地假定固体骨质和孔穴内的骨髓这两种组分材料密度保持不变, 因此, 由质量平衡方程和不可压假定不难得到:

$$\frac{\partial \phi^0}{\partial t} = \text{div}(\phi^0 x_s') = 0 \quad (3)$$

(3)式是由体积分数表达的平衡方程, 显然, 这与模型本身是自一致的. 多孔骨架的体积分数同时满足关系式:

$$\phi' = \phi_0 (\det F_s)^{-1} \quad (4)$$

式中 ϕ_0 表示多孔固体在参考构形中的体积分数, $\det F_s$ 表示多孔固体的变形梯度的行列式. 方程(3)联合饱和约束条件并经整理后得:

$$\text{div}(\phi' x_s' + \phi^f x_f') = 0 \quad (5)$$

对材料密度保持不变的饱和多孔材料的热力学考察表明^[6], 局部应力张量和动量交换项 $\hat{p}^f$ 可分解成两部分:

$$T_s' = -\phi' p I + T_s' \quad (6)$$

$$T_f' = -\phi^f p I \quad (7)$$

$$\hat{p}^f = p \text{grad} I \phi^f + \hat{p}_e^f \quad (8)$$

上式中的 T_s' 为多孔固体骨质中的应力, p 为孔隙中骨髓压力, 多孔材料中的总应力 T 为各个组分中的局部应力之和, 即 $T = T_s' + T_f' = -pI + T_s'$.

若考察的材料限定在小变形和等温范围内, 则忽略体力时场方程可写成如下形式:

$$\text{div}(\phi' v_s + \phi^f v_f) = 0 \quad (9)$$

$$\rho' (v_s)_i' = \text{div} T_s' - \phi' \text{grad} p - \hat{p}_e^f \quad (10)$$

$$\rho^f (v_f)_f' = -\phi^f \text{grad} p + \hat{p}_e^f \quad (11)$$

(9), (10), (11)式中 $v_s = (u_s)_i'$ 和 $v_f = (u_f)_f'$ 分别描述多孔固体骨质和骨髓的速度, 而 u_s 和 u_f 分别表示其位移. 考虑线弹性的多孔固体骨质, 则有效应力的本构方程则为:

$$T_s' = 2\mu'(e_s) e_s + \lambda'(e_s \cdot I) I, e_s = \frac{1}{2} (\text{grad} u_s + \text{grad} T u_s) \quad (12)$$

式中 $\mu'(\phi_0)$ 和 $\lambda'(\phi_0)$ 为空的多孔固体骨质的表观拉梅常数, e_s 是线性化的拉格朗日应变张量. 此外, 在等温情况下 $\hat{p}_e^f$ 表达为:

$$\hat{p}_e^f = -\alpha_v (v_f - v_s) \quad (13)$$

不难看出, $\hat{p}_e^f$ 表达了固一流两相间流动的摩擦阻力, 因此称为扩散阻力, 系数 α_v 称为扩散阻力系数, 并且对各向同性的两相多孔材料, $\alpha_v = (\phi')^2 \gamma_f' / k$, 这里 γ_f' 是孔穴中流体的比重, k 是多孔材料的水力渗透系数. 此外, 利用方程(4)式, 体积分数 ϕ' 可由 $\phi' = \phi_0 (1 + e_s \cdot I)^{-1}$ 直接决定, 既然 $e_s \cdot I \ll 1$, 则 ϕ' 在小变形范围内近似为 ϕ_0 .

在两相饱和多孔弹性理论的框架内, 方程(1~13)式构成了松质骨的生物力学的一组完整的控制方程, 若给定初、边值条件, 就可获得相应的流固耦合力学响应.

2 一维应力松弛响应

实验室研究松质骨的力学性质时, 经常是将试样置于一个侧壁高度润滑的压力室, 通

过一块自由排水的刚性多孔板加载. 由于侧向膨胀受到约束, 变形和流动只能发生在一个方向上(例如 z 轴), 因此所考察的响应是一维的耦合问题. 围限压缩应力松弛问题是在置于刚性腔中的松质骨组织试样的顶部, 通过具有较大渗透率的刚性板施加均匀外部作用(位移), 当位移达到一定值时, 保持其大小不变(见图 1). 在此过程中, 固体骨质和骨髓的速度、位移、压力以及骨质的有效应力等均会发生变化. 令 z 轴垂直于加载边界, 施加在边界上的位移为时间 t 的函数 $f(t)$, 并且令一维情况下的固体骨质和充填流体的位移分别用 u' 和 u^f 表示, 固体骨质中的有效应力用 σ_e' 表示, 它们都是位置 z 和时间 t 的函数.

对一维松弛问题, 自由排水边界的加载函数为:

$$u'(0, t) = g(t), \quad p(0, t) = 0 \quad (14)$$

上述边界条件表明刚性多孔加载板具有足够充分的渗透性, 保证自由流体边界. 初始条件为:

$$u'(z, 0) = 0, \quad u^f(z, 0) = 0, \quad u'_{,t}(z, 0) = 0, \quad u^f_{,t}(z, 0) = 0 \quad (15)$$

上式中出现的 $u'_{,t}$ 和 $u^f_{,t}$ 分别表示位移对时间的一阶导数.

对前述动力响应的控制方程(1-13)在一维情况下的形式进行拉氏变换, 并利用初、边值条件(14)和(15), 再经过反变换后整理可得关于位移动力响应的精确解为:

$$u(z, t) = aN'(z, t) + bN(z, t) \quad (16)$$

$$u^f(z, t) = -\frac{\phi^f}{\phi'} u'(z, t) \quad (17)$$

(16), (17)式中:

$$N(z, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^t M(z, t - \tau) e^{-\frac{b}{2a}\tau} I_0\left(-\frac{b}{2a}\tau\right) d\tau \quad (18)$$

$$M(z, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^t g(t - \tau) e^{-\frac{b}{2a}\tau} I_0\left(\frac{b}{2a} \sqrt{\tau^2 - az^2}\right) H(\tau - \sqrt{a}z) d\tau \quad (19)$$

$N'(z, t)$ 和 $N(z, t)$ 分别表示式(18)中函数 $N(z, t)$ 对时间的二阶和一阶偏导数.

在一维问题中, 根据小变形和固体骨质线弹性假设, 得有效应力的松弛解析表达式:

$$\sigma_e'(z, t) = -(\lambda' + 2\mu') (aM'(z, t) + bM(z, t)) \quad (20)$$

(20)式, $M'(z, t)$ 和 $M(z, t)$ 分别表示式(19)中函数 $M(z, t)$ 对时间的二阶和一阶偏导数. 同理, 设函数:

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^t g(t - \tau) e^{-\frac{b}{2a}\tau} I_0\left(-\frac{b}{2a}\tau\right) d\tau \quad (21)$$

可得流体压力之解析表达式:

$$p(z, t) = \frac{n'\rho^f}{(n^f)^2} (K'(t) - M'(z, t)) + \frac{\alpha_v}{(n^f)^2} (K'(t) - M'(z, t)) \quad (22)$$

(22)式中, $K'(t)$ 和 $K(t)$ 分别表示式(21)中函数 $K(t)$ 对时间的二阶和一阶偏导数.

在以上应力松弛响应表达式中, $I_0(z)$ 是修正的零阶贝塞尔函数, $H(t)$ 是 Heaviside 阶跃函数, 两个参数 a 和 b 的形式分别为:

$$a = \frac{(\phi^f)^2 \rho^f + (\phi^f)^2 \rho'}{(\phi^f)^2 (\lambda' + 2\mu')}, \quad b = \frac{\alpha_v}{(\phi^f)^2 (\lambda' + 2\mu')} \quad (23)$$

根据上述应力松弛响应的表达式(式(17~23)),编制了相应的计算机程序,计算了相应的算例. 图1为边界上所加位移型式,其中, $u_0=2.0\text{mm}$, $t_0=10.0\text{s}$. 算例中松质骨的材料参数取为: $\phi'=0.60$, $\phi''=0.40$, $\rho_i=1.80\text{g/cm}^3$, $\rho_f=0.90\text{g/cm}^3$, $E'=63.60\text{MPa}$, $\nu'=0.30$, $k=0.01\text{m/s}$. 图2为不同深度固体骨质与时间的相关特性,可以看出,随着深度加大,位移有明显的滞后效应,表现出波的传播特性和松质骨的表观粘弹性和能量耗散特性. 图3是固体骨质有效应力随时间的变化,可以明显地观察到在松质骨表面附近的应力松弛现象. 由于松质骨中液体骨髓向外流动,所以在表面附近应力峰值很快松弛,到200s左右趋于平衡态. 而在较深的地方,应力明显滞后,表现出强烈的粘弹性性质,看不到应力峰值出现,无应力松弛现象. 沿深度方向上各点有效应力最终趋于一致,达到平衡状态. 图4骨髓压力随时间的变化关系. 在松质骨表面附近,随加载过程增加较少,而在较深的地方,由于骨髓的不可压缩假设,可以看到压力几乎同时达到最大值,且随深度的增加压力最大值趋于一致. 同时,在加载过程中,压力随时间均增加,外加变形一定后,即松弛过程中,压力值随时间逐渐减小,直至达到平衡状态. 在平衡状态,流体停止流动,压力为零,固体骨质中有效应力保持一定,外加载荷全部由固体相承担.

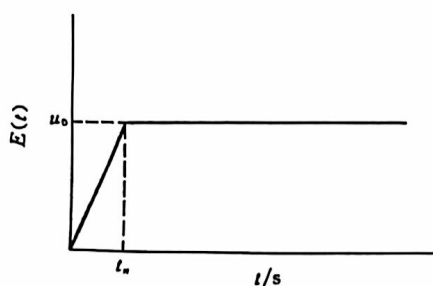


图1 边界载荷形式

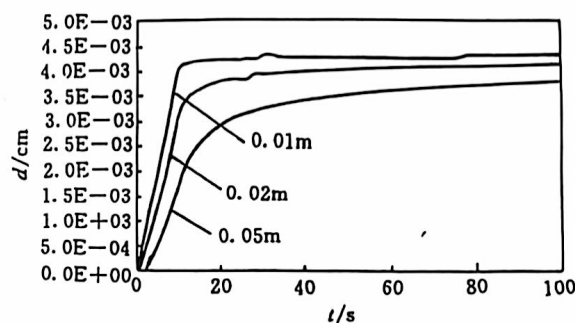


图2 松质骨不同深度位移随时间的变化

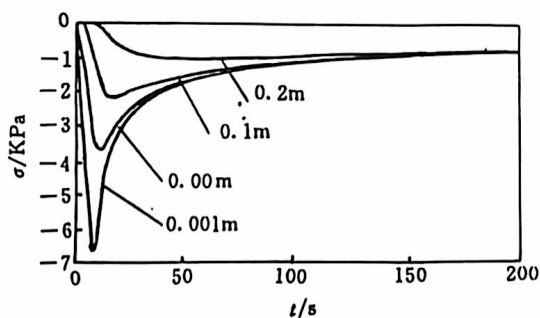


图3 松质骨不同深度有效应力与时间的关系

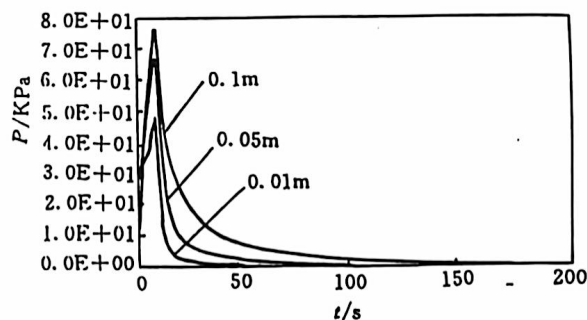


图4 不同深度位移随时间的变化

3 结束语

本文通过对松质骨结构特征的观察,引入了描述松质骨的两相多孔弹性模型,对松质骨应力松弛问题进行了深入分析,得出了松质骨固体骨质位移、有效应力及骨髓压力与时间的相关特性,同时,由于松质骨中流体组分的扩散和流动,松质骨呈现着一种强烈的表

观粘弹性行为以及能量耗散性质,松质骨中的流动机制是松质骨的表观粘弹性和能量耗散现象的根本原因. 本文所给出的一维应力松弛的解析结果将为松质骨应力松弛实验研究及有限元分析等数值方法提供标准参考.

参考文献:

- [1] KEAVENY T M and HAYES W C. A 20-year perspective on the mechanical properties of trabecular bone[J]. J Biomech Engng, 1993, 115: 534—542.
- [2] MOW V C, KUEI S C, LAI W M, et al. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments[J]. J Biomech Engng, 1980, 102: 73—84.
- [3] BOWEN R M. Incompressible porous media models by us of the theory of mixtures[J]. Int J Engng Sci, 1980, 18: 1129—1148.
- [4] BOWEN R M. Compressible porous media models by us of the theory of mixtures[J]. Int J Engng Sci, 1980, 20: 697—735.
- [5] BOER D R. Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory[J]. Appl Mech Rew, 1996, 49(4): 201—262.